

**Программа экзамена по курсу
«Теория и методика обучения математике в старшей, профильной и высшей школе»
для магистрантов 1 года обучения (ОЗО) на 2014-2015 уч. год**

канд. пед. наук, доц. Пырков В.Е.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1. *Общие вопросы методики обучения алгебре и началам анализа в старшей школе:* общая характеристика курса, цели, задачи и содержательные основы; доминирующие формы обучения учащихся.
2. *Числовая линия в курсе математики старшей школы:* роль и место; общая схема введения новых чисел на примере действительных чисел.
3. *Методика изучения преобразования выражений:* роль и место преобразования выражений; особенности их изучения в старшей школе; типичные ошибки учащихся и пути их предупреждения.
4. *Методика изучения уравнений в курсе алгебры и начал анализа:* цели, требования к математической подготовке учащихся; классификация; различные стратегии изучения; характеристика обобщенных приемов и методов решения; типичные ошибки учащихся и пути их предупреждения.
5. *Методика изучения неравенств в курсе алгебры и начал анализа:* цели; требования к математической подготовке учащихся; классификация; основное содержание; специфика изучения неравенств различных видов.
6. *Методика изучения тригонометрических уравнений и неравенств в курсе алгебры и начал анализа:* цели, теоретическое и прикладное значение темы; различные подходы к изложению темы; основные методы и приемы решения.
7. *Методика изучения функций в курсе математики старшей школы:* общая характеристика этапа завершения функциональной линии; способы исследования свойств функции в старшей школе; методика изучения функции в старшей школе (на примере конкретной функции).
8. *Методика изучения тригонометрических функций и преобразований тригонометрических выражений в курсе алгебры и начал анализа:* различные подходы; мотивация изучения темы; основные этапы формирования понятия о тригонометрических функциях числового аргумента.
9. *Методика изучения непрерывности и предела функции в курсе алгебры и начал анализа:* роль и место темы; содержание стандарта и его реализация в современных учебниках; пропедевтика понятия предела; технологическая схема введения понятий непрерывность и предел функции в точке.
10. *Методика изучения производной в курсе алгебры и начал анализа:* цели, требования к математической подготовке учащихся, основное содержание; методика введения понятия «производная»; основные задачи, решаемые с помощью производной в школьном курсе математики; методика изучения применения производной к исследованию функций; методика изучения уравнения касательной к графику функции.
11. *Методика изучения первообразной в курсе алгебры и начал анализа:* цели, требования к математической подготовке учащихся, основное содержание; различные подходы к изложению темы; технологическая цепочка изучения темы «Первообразная и интеграл».

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Демонстрация умений решения алгебраической части заданий из итоговой аттестации учащихся по математике (демонстрационный вариант КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня) [50% баллов за задание], его оформления и разработки методических рекомендаций для обучения учащихся (логико-дидактический анализ полученного задания; характеристика используемых методов решения; схема решения; возможные ошибки и пути их предупреждения) [50% баллов за задание]. Типы заданий: №15 – тригонометрическое уравнение с отбором корней; №17 – неравенства (показательные, логарифмические, тригонометрические) и их системы; №19 – задача на сложные проценты; №20 – задача с параметром; №21 – нестандартная задача по теории чисел олимпиадного типа.

ЗАДАНИЯ НА 15 БАЛЛОВ

1. а) Решите уравнение $16\cos^4 x - 24\cos^2 x + 9 = 0$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi, 3\pi]$.

2. а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

3. а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cdot \sin x = \cos x$. б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-5\pi, -4\pi]$.

4. а) Решите уравнение

$$\left(\frac{1}{16}\right)^{\cos x} + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{\cos x} - 4 = 0$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[4\pi, 7\pi]$.

$$\frac{2\cos^2 x - 2\cos x \cos 2x - 1}{\sqrt{\sin x}} = 0.$$

5. Решите уравнение

6. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{2x+2} - 21 \cdot 2^{x-1} + 1 \leq 0, \\ \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 2x} + \frac{3x + 1}{x - 1} \leq \frac{4x + 1}{x}. \end{cases}$$

7. Решите систему

$$\begin{cases} \log_{3x+1}(4x-6) + \log_{4x-6}(3x+1) \leq 2, \\ 16^x - 12^x - 2 \cdot 9^x \leq 0. \end{cases}$$

8. Решите неравенство $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right) > 0$.

9. Решите неравенство $\log_x 3 + 2\log_{3x} 3 - 6\log_{9x} 3 \leq 0$.

10. Решите систему неравенств $\begin{cases} (x-3)|x-3| - |x-1| \geq 0, \\ (x^2 - 7x + 6) \cdot \sqrt{11-x} \leq 0. \end{cases}$

ЗАДАНИЯ НА 25 БАЛЛОВ

11. При каждом a решите систему уравнений $\begin{cases} 2^{1+x} = 32a\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2 + a^2 + 2 - 2x - 2a} + \sqrt{x^2 + a^2 - 6x + 9} = \sqrt{5}. \end{cases}$

12. При каких p данная система имеет решения: $\begin{cases} x^2 + px + 2 = 0, \\ \sin^2 \pi p + \sin^2 \pi x + 2^{|y|} = \left|\sin \frac{\pi x}{2}\right|? \end{cases}$

13. Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$ на множестве $|x| \geq 1$ не менее 6.

14. Найдите все значения параметра a при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 4|y-3| = 12 - 3|x|, \\ y^2 - a^2 = 3(2y-3) - x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

15. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a, \\ 2xy = 2a - 1 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

ЗАДАНИЯ НА 20 БАЛЛОВ

16. а) Решите уравнение $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} = 3$. б) Найдите все корни на промежутке $\left[\frac{3}{4}; 1\right]$.

17. а) Решите уравнение $\sin^3 x - \sin^2 x = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$; б) Найдите все корни на промежутке $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

18. а) Решите уравнение $8 \sin x \cdot \cos^3 x - 2 \sin 2x - 2 \cos^2 x + 1 = 0$. б) Найдите все корни на промежутке $\left[-\frac{3\pi}{2}; -2\right]$.

19. а) Решите уравнение $2 \sin x - \frac{1}{\cos x} + \operatorname{tg} x - 1 = 0$. б) Найдите все корни, принадлежащие промежутку $[-\pi; \pi]$.

20. Дано уравнение $\frac{6 \cos^2 x + \cos x - 2}{(3 \cos x + 2) \cdot \sqrt{-\operatorname{tg} x}} = 0$. а) Решите уравнение. б) Найдите все корни на промежутке $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

21. Дано уравнение $3^{\operatorname{tg}^2 2x} + 3 - \frac{1}{3} \cdot 3^{(\sqrt{3}+1) \cdot \frac{2 \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}} x + 1 = 0$.

а) Решите уравнение. б) Найдите корни на промежутке $\left[\frac{\pi}{3}; 3\pi\right]$.

22. а) Решите уравнение $\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{\cos x - \sin x - 1}$. б) Найдите все корни на промежутке $\left[-\frac{7\pi}{2}; 0\right]$.

23. а) Решите уравнение $\cos 2x + 2 \cos x + 7 = 2 \sin\left(\frac{7\pi}{2} + x\right) + 4 \sin^2 \frac{x}{2}$.

б) Найдите все корни на промежутке $[3; 4]$.

24. а) Решите уравнение $\log_2 (2 \sin^2 2x + 1) - 2 \log_2 \cos x = 1 + \log_2 5$.

б) Найдите все корни на промежутке $[-\pi; \pi]$.

25. Дано уравнение $\sin x \cdot \left(\sin x \cdot \cos^{-1} x + \frac{1}{3}\right) = \sqrt{3} \cdot \left(\sin x + \frac{1}{3} \cos x\right)$.

а) Решите уравнение. б) Найдите корни на промежутке $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$.

26. Решите систему неравенств $\begin{cases} x + \frac{4x^2 + 5x}{x^2 - x - 6} \leq \frac{9}{5x - 15} + \frac{5x + 1}{5x + 10}, \\ 5^{x-1} + 5 \cdot (0,2)^{x-2} \leq 26. \end{cases}$

27. Решите систему: $\begin{cases} \frac{x - 7\sqrt{x} + 10}{2 - \sqrt{x}} \geq \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 3}, \\ \frac{\sqrt{20 - x^2} + x}{2x - 3} \leq \frac{\sqrt{20 - x^2} + x}{x - 6}. \end{cases}$

28. Решите систему неравенств $\begin{cases} \frac{4x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} \leq 1 - 2x, \\ \frac{2^{2+\sqrt{x-1}} - 24}{2^{1+\sqrt{x-1}} - 8} > 1. \end{cases}$

29. Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} |3x+2| + |2x-3| \leq 11, \\ \frac{7}{x^2-5x+6} + \frac{9}{x-3} + 1 < 0. \end{cases}$$
30. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \left(\log_2 \frac{5x+4}{4x}\right) \cdot \sqrt{x^4-5x^2+4} > 0, \\ (3^x-1) \cdot \sqrt{x^2-4x+3} \leq 0. \end{cases}$$
31. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \frac{3 \cdot 2^{1-x} + 1}{2^x - 1} \geq \frac{1}{1 - 2^{-x}}, \\ \log_{5x-4x^2} 4^{-x} > 0. \end{cases}$$
32. Решите систему неравенств:
$$\begin{cases} 2^{x+3} - x^3 \cdot 2^x \leq 16 - 2x^3, \\ \log_{0,1} (10^x - 9) \geq x - 1. \end{cases}$$
33. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 16^{3-2x} \cdot 0,25 < \left(\frac{32}{\sqrt{2}}\right)^{4-2x}, \\ \log_2^2(x-6)^2 + \log_2 \frac{(x-6)^4}{(x-4)^3} - 3 \log_{\frac{1}{2}}(x-4) \leq 15. \end{cases}$$
34. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} \frac{6}{3^x-1} < 3^x, \\ \sqrt{x^2+3x-18} \leq \frac{6\sqrt{x^2+3x-18}}{x+2}. \end{cases}$$
35. Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 7^{x-\frac{1}{8}x^2} < 7^{1-x} \cdot \left(\sqrt[8]{7}\right)^{x^2} + 6, \\ \log_x 2 < 6-x^2. \end{cases}$$

36. В банк помещена сумма 3900 тысяч рублей под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после вычисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к вкладу?

37. В конце августа 2001 года администрация Приморского края располагала некой суммой денег, которую предполагалось направить на пополнение нефтяных запасов края. Надеясь на изменение конъюнктуры рынка, руководство края, отсрочив закупку нефти, положила эту сумму 1 сентября 2001 года в банк. Далее известно, что сумма вклада в банке увеличивалась первого числа каждого месяца на 26% по отношению к сумме на первое число предыдущего месяца, а цена барреля сырой нефти убывала на 10% ежемесячно. На сколько процентов больше (от первоначального объема закупок) руководство края смогло пополнить нефтяные запасы края, сняв 1 ноября 2001 года всю сумму, полученную из банка вместе с процентами, и направив ее на закупку нефти?

38. Сергей взял кредит в банке на срок 9 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на 12%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Сергеем. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Сколько процентов от суммы кредита составила общая сумма, уплаченная Сергеем банку (сверх кредита)?

39. Транснациональная компания Амако inc. решила провести недружественное поглощение компании First Aluminum Company (FAC) путем скупки акций миноритарных акционеров. Известно, что Амако inc. было сделано три предложения владельцам акций FAC, при этом цена покупки одной акции каждый раз повышалась на 1/3, а общее количество приобретенных Амако inc. акций поглощаемой компании увеличивалась на 20%. Определите величину третьего предложения и общее количество скупленных акций First Aluminum Company, если начальное предложение составляло \$27 за одну акцию, а количество акций, выкупленных по второй цене, 15 тысяч.

40. Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк 3/4 от всей суммы, которую он должен банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму, на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

ЗАДАНИЯ НА 30 БАЛЛОВ

41. Два игрока ходят по очереди. Перед началом игры у них есть поровну горошин. Ход состоит в передаче сопернику любого числа горошин. Не разрешается передавать такое количество горошин, которое до этого уже кто-то в этой партии передавал. Ноль горошин тоже передавать нельзя. Тот, кто не может сделать очередной ход по правилам, — считается проигравшим. Кто — начинающий или его соперник — победит в этой игре, как бы ни играл его партнёр?

Рассмотрите случаи:

- а) У каждого по две горошины;
- б) У каждого по три горошины;
- в) Общий случай: у каждого по N горошин.

42. В школе, где учатся Поля, Маня и Дуня, есть длинный коридор вдоль одной из стен которого расположен длинный ряд из n ячеек, занумерованных натуральными числами от 1 до n , закрывающихся на замки, в которых школьники могут хранить свои личные вещи. Однажды, придя в школу в выходной день, Поля обнаружила все ячейки открытыми. Она стала обходить ряд ячеек сначала до конца, закрывая на замок каждую вторую ячейку. Достигнув конца ряда, она развернулась и снова стала закрывать на замок каждую вторую ячейку из тех, которые еще были открыты. Таким образом Поля продолжала обходить ряд и закрывать на замок ячейки до тех пор, пока осталась незакрытой одна ячейка. Обозначим $f(n)$ номер последней открытой ячейки. Например, если количество ячеек $n = 15$, то $f(15) = 11$, как показано на рисунке

| | | | | | | | | | | | | | | | |
|---|----------|----------|---|----------|----------|----------|----------|----------|---|-----------|-----------|-----------|----|-----------|----|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| → | 1 | <u>2</u> | 3 | <u>4</u> | 5 | <u>6</u> | 7 | <u>8</u> | 9 | <u>10</u> | 11 | <u>12</u> | 13 | <u>14</u> | 15 |
| | <u>1</u> | 3 | | <u>5</u> | 7 | | <u>9</u> | 11 | | <u>13</u> | 15 | ← | | | |
| → | | 3 | | | <u>7</u> | | | 11 | | | <u>15</u> | | | | |
| | | <u>3</u> | | | | | | 11 | | | | | | | ← |

- а) Найдите $f(50)$.

Докажите, что:

- б) не существует натурального числа n , такого что $f(n) = 2013$;
- в) существует бесконечное множество натуральных чисел n , таких что $f(n) = f(50)$.

43. Дано иррациональное число a , такое что $0 < a < 1/2$. По нему определяется новое число a_1 как меньшее из двух чисел $2a$ и $1 - 2a$. По этому числу аналогично определяется a_2 и так далее.

- а) Докажите, что для некоторого n выполнено неравенство $a_n < 3/16$.

- б) Может ли случиться, что $a_n > 7/40$ при всех натуральных n ?

44. Группа психологов разработала тест, пройдя который, каждый человек получает оценку — число Q — показатель его умственных способностей (чем больше Q , тем больше способности). За рейтинг страны принимается среднее арифметическое значений Q всех жителей страны.

- а) Группа граждан страны A эмигрировала в страну B . Мог ли при этом у обеих стран вырасти рейтинг?

- б) После этого группа граждан страны B (в числе которых могут быть и бывшие эмигранты из A) эмигрировала в страну A . Возможно ли, что рейтинги обеих стран опять выросли?

в) Группа граждан страны A эмигрировала в страну B , а группа граждан B — в страну C . В результате рейтинги каждой страны оказались выше первоначальных. После этого направление миграционных потоков изменилось на противоположное — часть жителей C переехала в B , а часть жителей B — в A . Оказалось, что в результате рейтинги всех стран опять выросли (по сравнению с теми, что были после первого переезда, но до начала второго). Может ли такое быть (если да, то как, если нет, то почему)? Предполагается, что за рассматриваемое время Q граждан не изменилось, никто не умер и не родился.

45. Натуральные числа M и K отличаются перестановкой цифр.

Доказать что:

а) сумма цифр числа $2M$ равна сумме цифр числа $2K$;

б) сумма цифр числа $M/2$ равна сумме цифр числа $K/2$ (если M и K чётны);

в) сумма цифр числа $5M$ равна сумме цифр числа $5K$.